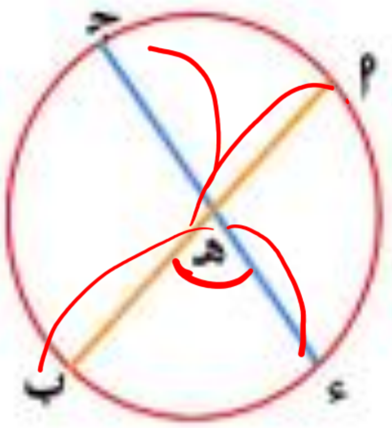
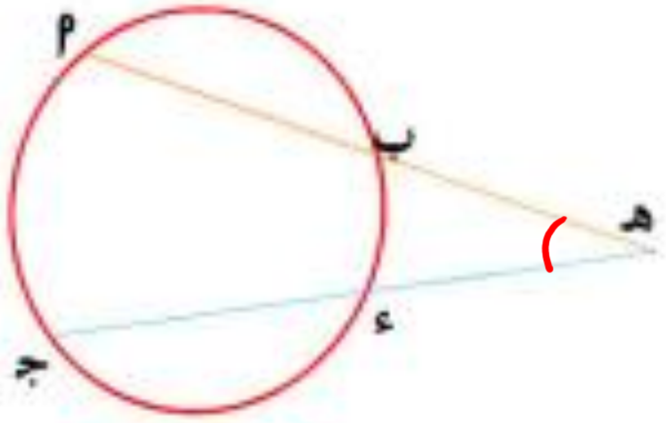
تمرين مشهور



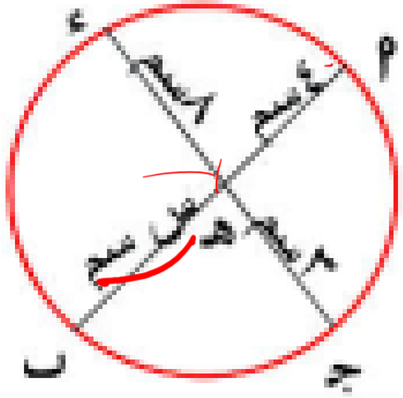


علشان متتساش ابدأ من نقطة التقاطع

هـ أ × هـ ب = هـ ء × هـ جـ

مثال (١) أوجد قيمة س

١



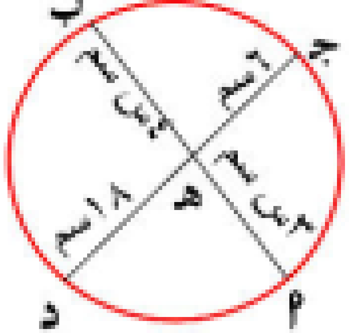
∵ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

٤ × س = ٣ × ٨

∴ ٤س = ٢٤

∴ س = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦سم

٢



$\because$ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

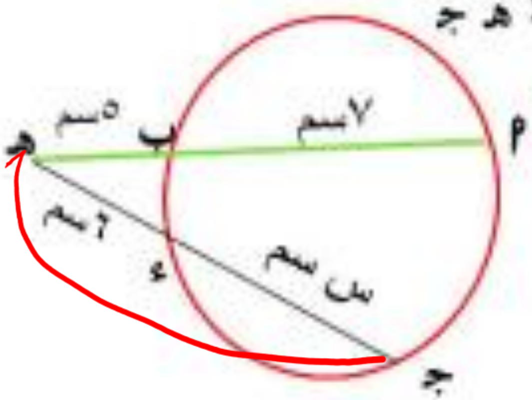
٣س × ٤س = ٦ × ١٨

$\therefore$ ١٢س^{٢} = ١٠٨

$\therefore$ س^{٢} = $\frac{١٠٨}{١٢}$ = ٩

$\therefore$ س = $\sqrt{٩}$ = ٣

٣



$\because$ هـ ب × هـ أ = هـ ء × هـ جـ

٥ × ١٢ = ٦ × هـ جـ

$\therefore$ هـ جـ = $\frac{١٢ × ٥}{٦}$ = ١٠

$\therefore$ هـ ء = ١٠ - ٦ = ٤سم

$\therefore$ س = ٤سم

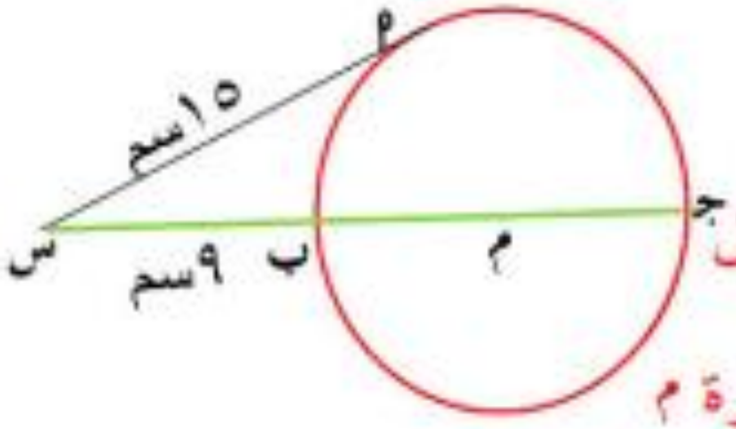
$\frac{٥ × ١٢}{٦}$ = $\frac{٦ × \text{هـ جـ}}{٦}$

$\boxed{\text{هـ جـ} = ١٠}$

س + ٦ = ١٠

$\boxed{\text{س} = ٤}$

مثال (٢)



في الشكل المقابل

$\overline{\text{س ا}}$ مماسه للدائرة م

عند ا ، احسب طول نصف قطر الدائرة.

الحـــل

∵ س ب × س جـ = (س ا)^{٢}

٩ × س جـ = (١٥)^{٢}

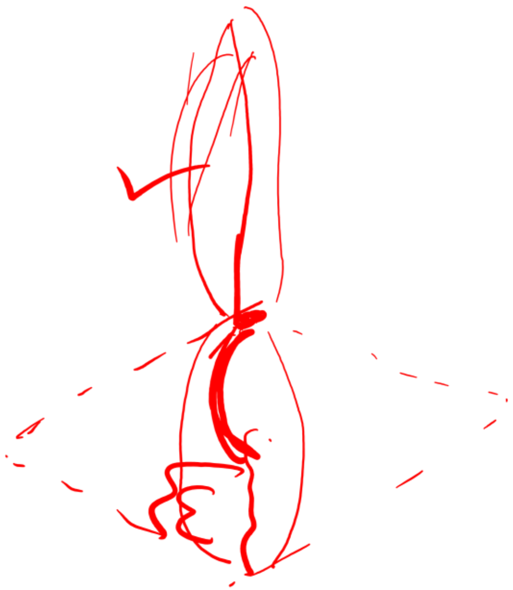
∴ س جـ = $\frac{(١٥)^{٢}}{٩}$ = ٢٥

∴ ب جـ = ٢٥ – ٩ = ١٦سم

∴ نق = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨سم

١٠ سم   ١٠ سم

ل = ٤ - ل



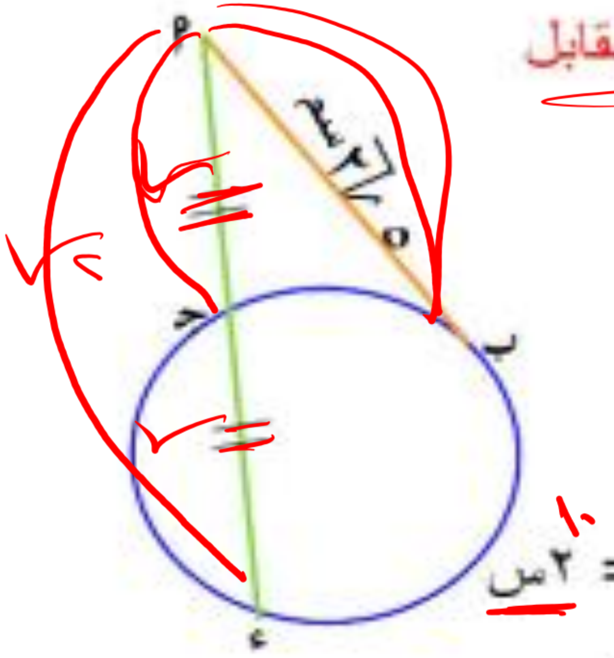
ل × ٤ = ٦ × ٦

٩ × ٤ = ٣٦

$\boxed{ل = ٩}$

مثال(٣) في الشكل المقابل

أوجد طول ٩ء



الحـــل

نفرض أن ٩ جـ = س

∴ جـ ء = س ٥ ∴ ٩ ء = ٢س ١٠

∵ ٩ جـ × ٩ ء = (٩ ب)^{٢}

س × ٢س = (٥ √٢)^{٢}

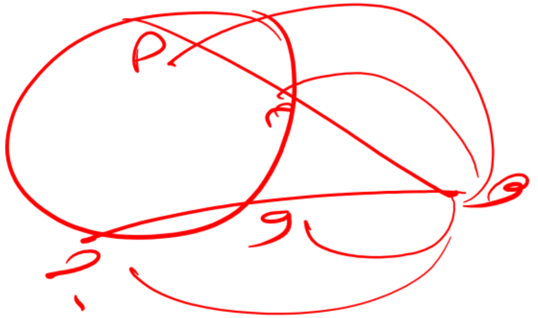
٢س^{٢} = ٥٠ ∴ س^{٢} = $\frac{٥٠}{٢}$

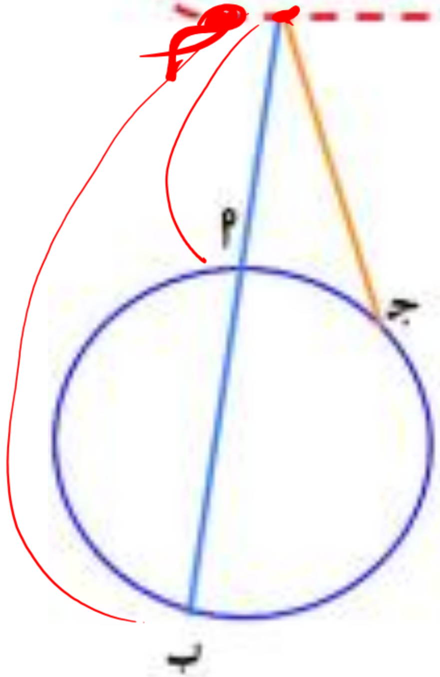
∴ س^{٢}=٢٥ $\boxed{∴ \text{س} = ٥}$

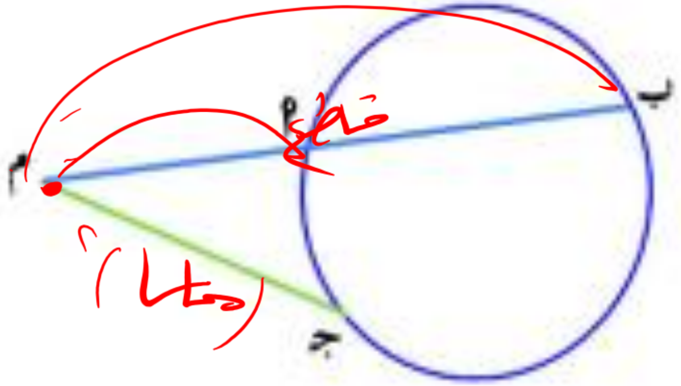
∴ ٩ ء = ٢×٥=١٠سم

نتيجة ١

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس
فإن حاصل ضرب طول القاطع في طول
جزئه الخارجي = مربع طول المماس



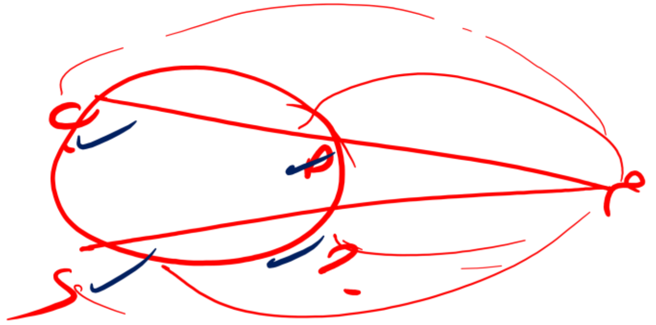




م أ × م ب = (م جـ)^{٢} م أ × م ب = (م جـ)^{٢}

عكس تمرين مشهور

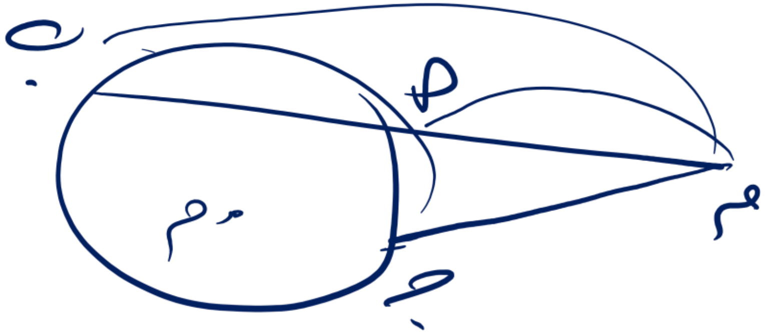
إذا تقاطع المستقيمان الحاويان $\overline{٩ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ في نقطة م وكان م٩ × م ب = م جـ × م ء فإن النقط ٩ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة.



* وكذلك عكس النتيجة :

إذا كان (م جـ)^٢ = م٩ . م ب

فإن $\overleftrightarrow{م جـ}$ مماس للدائرة المارة بالمثلث ٩ ب جـ عند جـ.

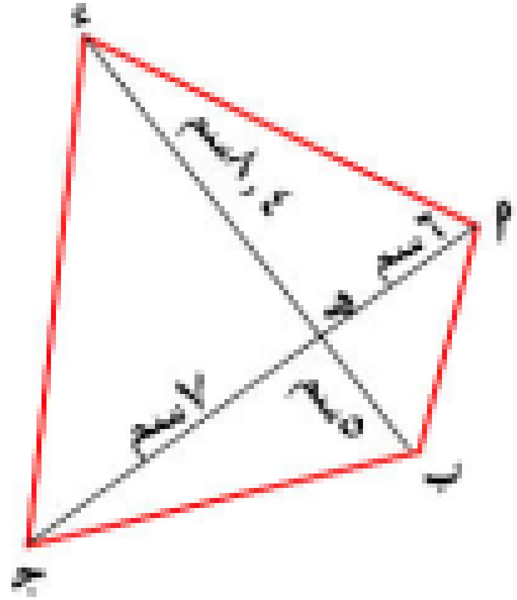


م٩ . م ب = (م جـ)^٢ =

مثال(٤) أثبت أن:

أ ، ب ، جـ ، ء

تقع على دائرة واحدة



الحل

هـ أ × هـ جـ = ٦×٧=٤٢

هـ ب × هـ ء = ٥×٨,٤=٤٢

∵ أ جـ ∩ ب ء ={هـ}

، هـ أ × هـ جـ= هـ ب × هـ ء

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

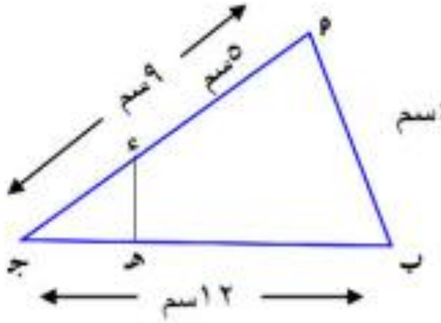
مثال(٥) ∆ أ ب جـ فيه أ جـ =٩سم، ب جـ =١٢سم

، فرضت ء ∈ أ جـ بحيث أ ء =٥سم ، فرضت

هـ ∈ ب جـ بحيث $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ هـ}}$ =٣

اثبت أن الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري

الحل



∵ جـ ء =٩-٥=٤سم

∴ جـ ء × جـ أ =

٤×٩=٣٦سم

∵ ب هـ = ٣جـ هـ

∴ ب جـ = ٤جـ هـ

∴ جـ هـ = $\frac{١٢}{٤}$ =٣سم

∴ جـ هـ × جـ ب = ٣×١٢=٣٦

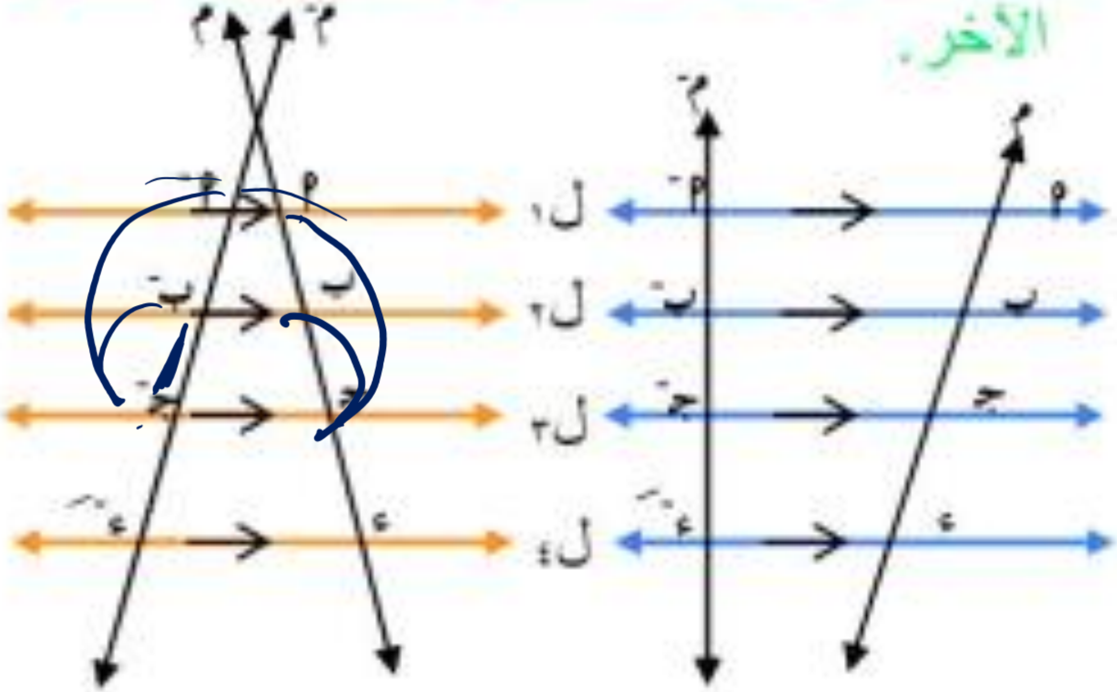
∴ جـ ء × جـ أ = جـ هـ × جـ ب

∴ الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري

الدرس الثاني: نظرية تاليس

نظرية تاليس العامة:

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



$$\frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{أ'ج'}}} = \frac{\overline{\text{جء}}}{\overline{\text{ج'ء'}}} = \frac{\overline{\text{بج}}}{\overline{\text{ب'ج'}}} = \frac{\overline{\text{أب}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}$$

وكذلك نلاحظ أن

$$\frac{\overline{\text{أ'ج'}}}{\overline{\text{ج'ء'}}} = \frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{جء}}}$$

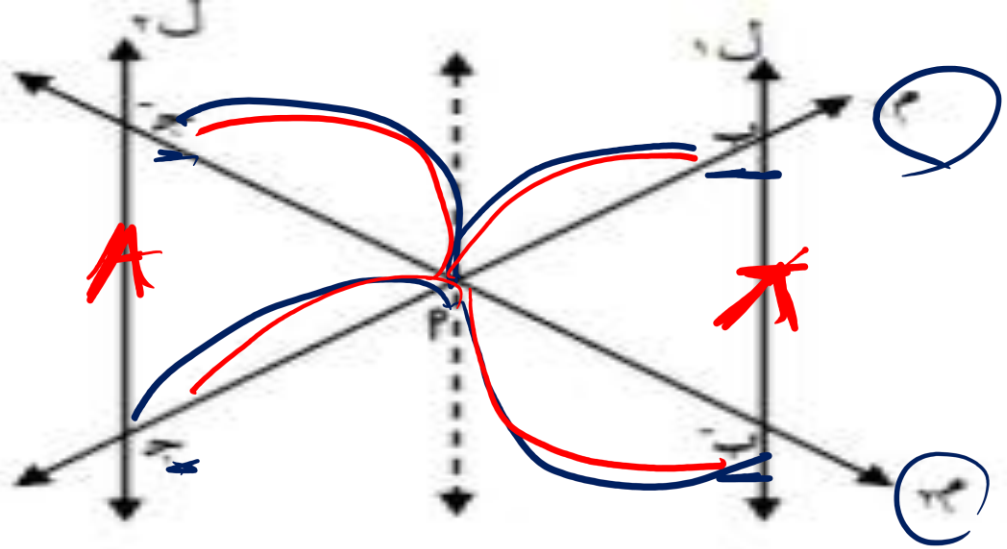
$$\frac{\overline{\text{أ'ج'}}}{\overline{\text{ج'ب'}}} = \frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{جب}}}$$

$$\frac{\overline{\text{ب'ء'}}}{\overline{\text{ء'أ'}}} = \frac{\overline{\text{بء}}}{\overline{\text{ءأ}}}$$

وهكذا

حالات خاصة

١



إذا كان ل١ // ل٢ ، م١ ، م٢ قاطعان لهما فإن:

$$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أ}\bar{\text{ب}}}{\text{أ}\bar{\text{جـ}}}$$

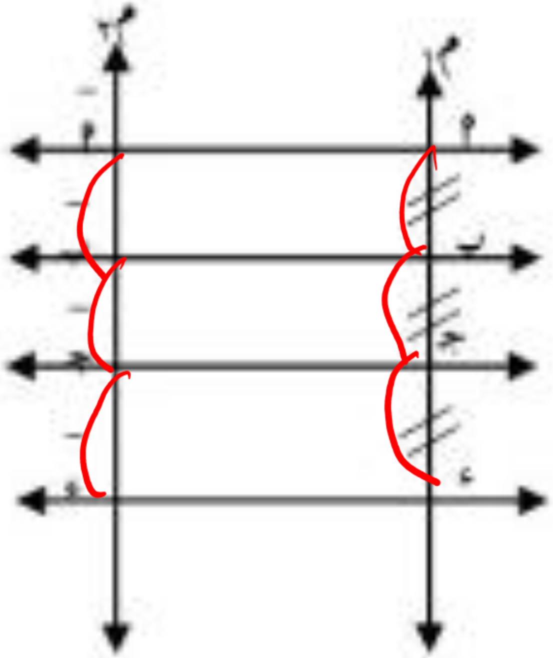
والعكس صحيح

بمعنى إذا كان $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أ}\bar{\text{ب}}}{\text{أ}\bar{\text{جـ}}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{ب}\bar{\text{ب}}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{جـ}\bar{\text{جـ}}}$

٢ **نظرية تاليس الخاصة:**

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية في الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية أيضاً في الطول.



إذا كان

أ ب = ب جـ = جـ ء

فإن

أَ بَ = بَ جـَ = جـَ ءَ

مثال (١)

أوجد طول $\overline{\text{هـ ن}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$

$\because \overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$

$\therefore \dfrac{\text{أ ء}}{\text{أ هـ}} = \dfrac{\text{ء م}}{\text{هـ ن}} = \dfrac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}}$

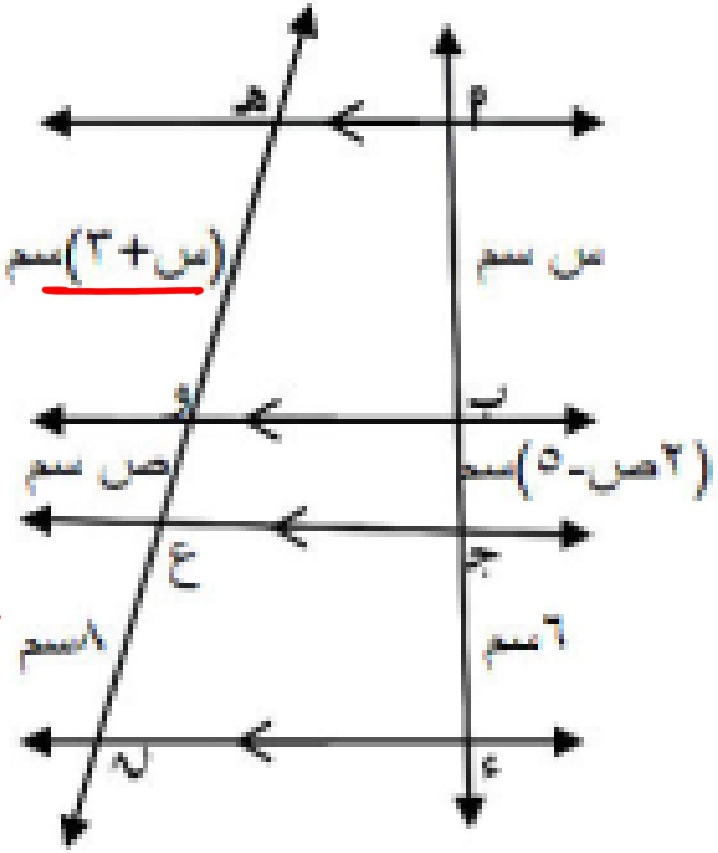
$\therefore \dfrac{٦}{١٢} = \dfrac{١٠}{\text{هـ ن}} = \dfrac{\text{م جـ}}{٥}$

$\therefore \text{هـ ن} = \dfrac{١٢ \times ١٠}{٦} = ٢٠\text{سم}$

، $\text{م جـ} = \dfrac{٥ \times ٦}{١٢} = ٢,٥\text{سم}$

مثال (٢)

أوجد قيمة س ، ص العددية



الحل

$\because \overleftrightarrow{\text{أهـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ج ع}} \parallel \overleftrightarrow{\text{د ل}}$

$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ع ل}}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{س}+٣} = \frac{٢\text{ص}-٥}{\text{ص}} = \frac{٦}{٨}$$

$$\frac{٢\text{ص}-٥}{\text{ص}} = \frac{٦}{٨}$$

$$٦\text{ص} = ١٦\text{ص} - ٤٠$$

$$-١٠\text{ص} = -٤٠$$

$$\boxed{\text{ص} = ٤}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{س}+٣} = \frac{٦}{٨}$$

$$٨\text{س} = ٦\text{س} + ١٨$$

$$٢\text{س} = ١٨$$

$$\boxed{\text{س} = ٩}$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{س}+\text{٣}} = \frac{\text{٦}}{\text{٨}}$$

$$\text{٨س} = \text{٦}(\text{س}+\text{٣})$$

$$\text{٨س} = \text{٦س} + \text{١٨}$$

$$\text{٨ س} - \text{٦س} = \text{١٨} \qquad \therefore \text{٢س} = \text{١٨}$$

$$\text{س} = \frac{\text{١٨}}{\text{٢}} = \text{٩}$$

وكذلك

$$\frac{\text{٢ص} - \text{٥}}{\text{ص}} = \frac{\text{٦}}{\text{٨}}$$

$$\text{٨}(\text{٢ص} - \text{٥}) = \text{٦ص}$$

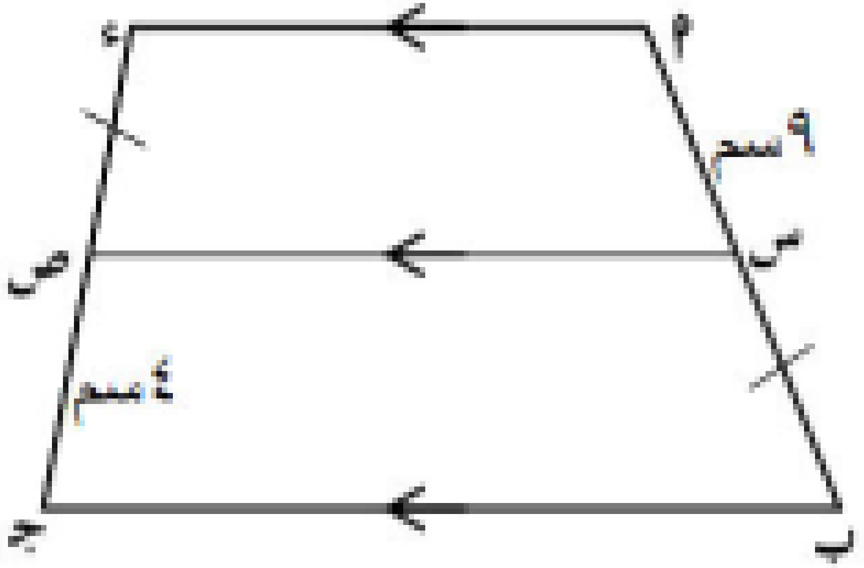
$$\text{١٦ص} - \text{٤٠} = \text{٦ص}$$

$$\text{١٦ص} - \text{٦ص} = \text{٤٠}$$

$$\therefore \text{١٠ص} = \text{٤٠}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{٤}$$

مثال (٣)



إذا كان ب س = ص ء

فاوجد طول $\overline{\text{ء ص}}$

$\because \overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \dfrac{\text{أ س}}{\text{ء ص}} = \dfrac{\text{س ب}}{\text{ص جـ}}$ ، $\because$ س ب = ء ص

$\therefore \dfrac{\text{أ س}}{\text{ء ص}} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ص جـ}} \qquad \dfrac{٩}{\text{ء ص}} = \dfrac{\text{ء ص}}{٤}$

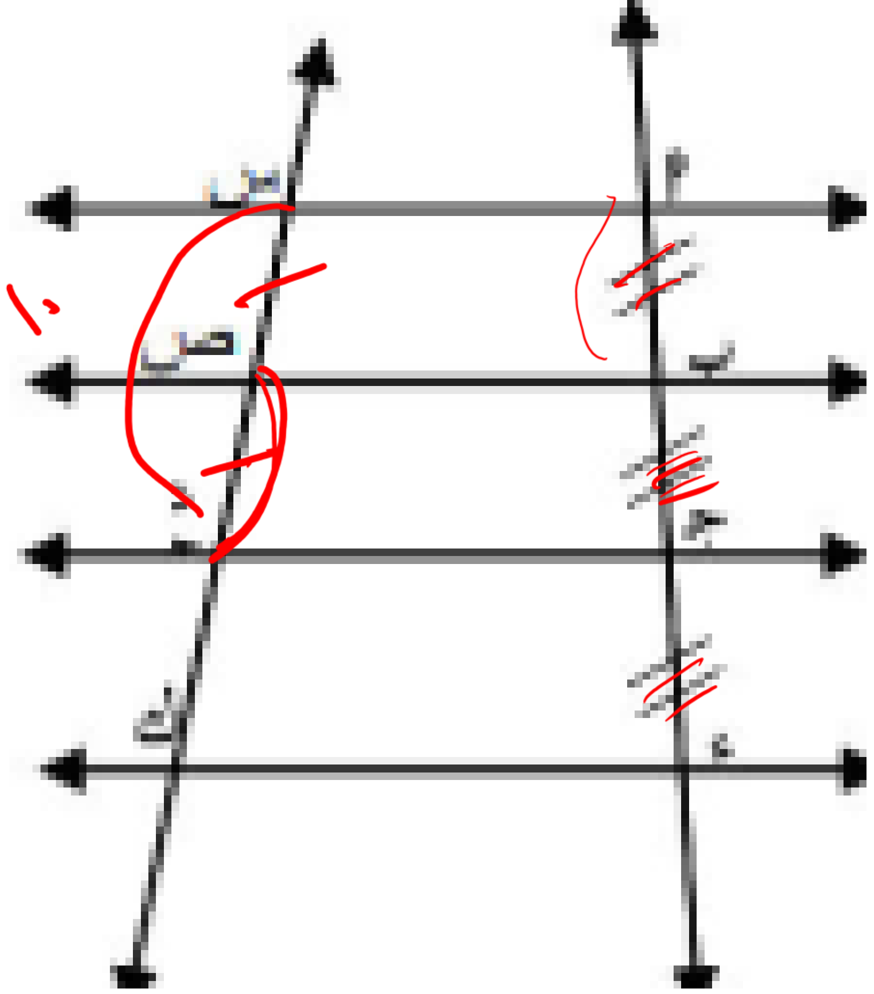
$\therefore (\text{ء ص})^{٢} = ٣٦ \qquad \therefore$ ء ص = ٦سم

مثال (٤)

أكمل:

إذا كان س ع = ١٠سم

فإن ص ع = ٥سم



∵ أ ب = ب جـ ∴ س ص = ص ع

∴ ص ع = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

∴ أب // م ء // ن هـ

، ب ء = ء هـ = هـ و

∴ س^{٢} - ١ = س + ٥ ← (١)

س^{٢} — س - ١ - ٥ = ٠

س^{٢} — س - ٦ = ٠

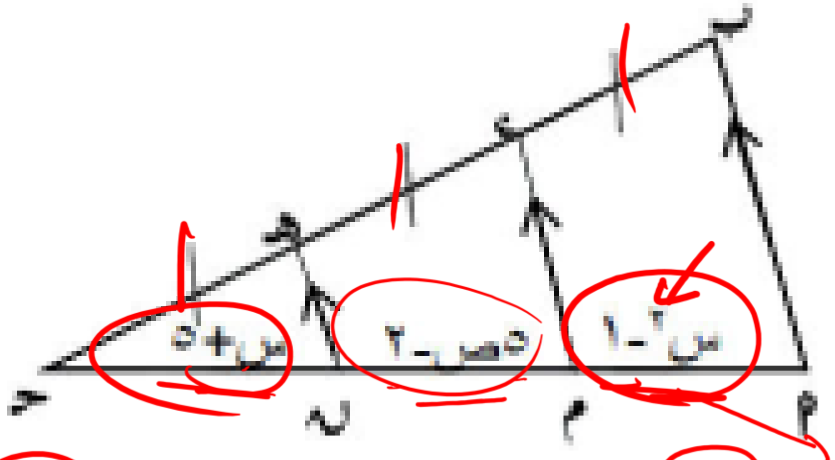
(س + ٢)(س - ٣) = ٠

س = -٢ أو س = ٣

مثال (٥)

أوجد قيمة

س ، ص



الحل

∴ أ م = ٤ - ١ = ٣

ن جـ = -٢ + ٥ = ٣

∴ م ن = ٣

٥ص - ٢ = ٣

٥ص = ٥

∴ ص = ١

أو

أ م = ٩ - ١ = ٨

ن جـ = ٣ + ٥ = ٨

م ن = ٨

٥ص - ٢ = ٨

٥ص = ١٠

ص = ٢

∵ أء // به // جو ، ءه = هو = وم

∴ أب = بجـ = جـم

∴ س^{2} ـ ٢ = س + ٤ = ٢ص ـ ٢

س^{2} ـ ٢ = س + ٤

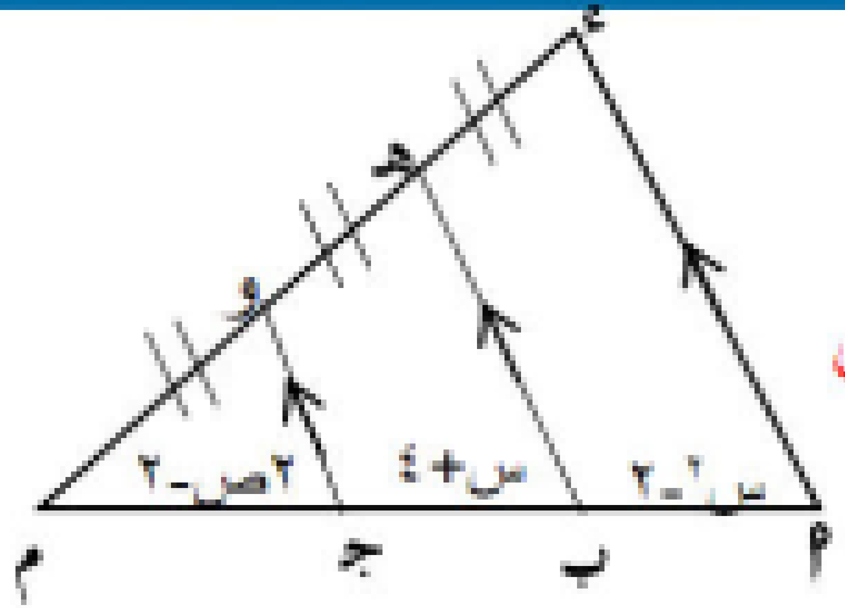
س^{2} ـ س ـ ٢ ـ ٤ = ٠

س^{2} ـ س ـ ٦ = ٠

(س + ٢)(س ـ ٣) = ٠

مثال (٦)

أوجد قيمة س ، ص



الحل

إما س = ـ ٢

أ ب = ٤ ـ ٢ = ٢

ب جـ = ـ ٢ + ٤ = ٢

∴ ٢ص ـ ٢ = ٢

٢ص = ٢ + ٢

٢ص = ٤

∴ ص = ٢

أو

س = ٣

أ ب = ٩ ـ ٢ = ٧

ب جـ = ٣ + ٤ = ٧

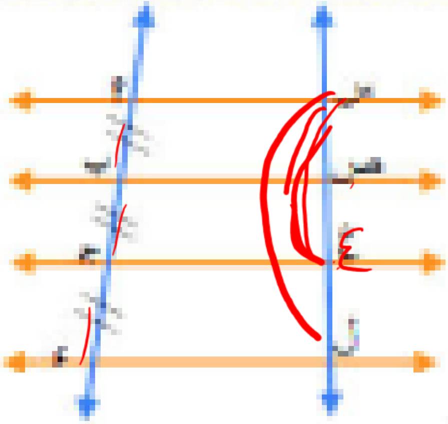
∴ ٢ص ـ ٢ = ٧

٢ص = ٧ + ٢

٢ص = ٩

∴ ص = ٤,٥

مثال (٧) إذا كان



س ل = ١٢سم فإن

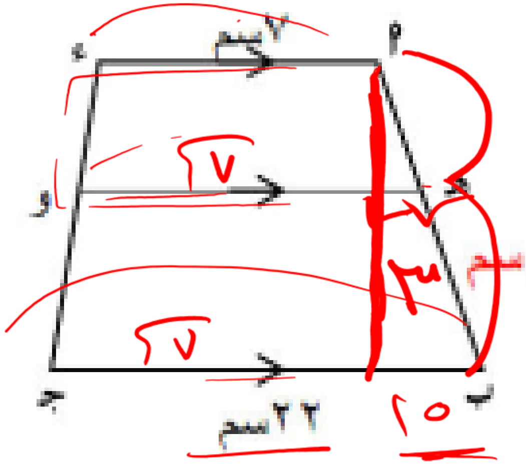
س ع = ...سم

$\frac{١٢}{٣} = ٤$ ∴ س ص = ص ع = ع ل = ٤سم

∴ س ع = ٨سم

١

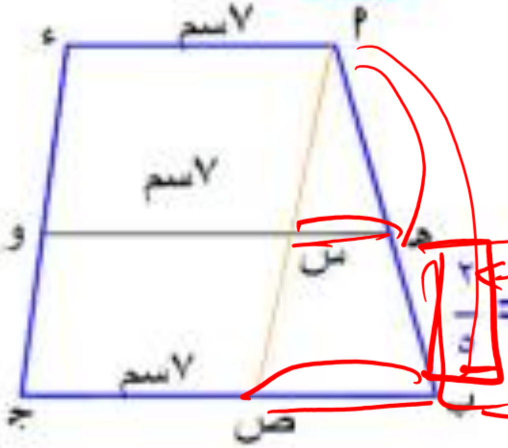
$\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٢}{٣}$



فإن هـ و = ...سم

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥



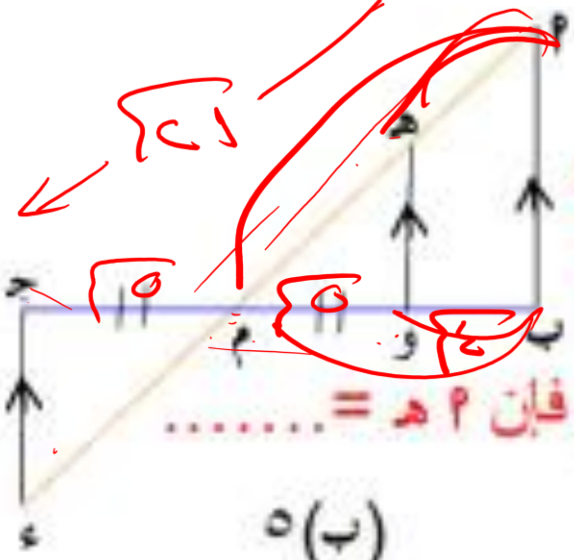
$\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{هـس}{ب ص} = \frac{أهـ}{أب} = \frac{٢}{٥}$

$\frac{هـس}{١٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ هـس = $\frac{٢ \times ١٥}{٥}$ = ٦سم ∴ هـ و = ١٣سم

٢ أ ء = ٢١سم ، م جـ = ٥سم ، و ب = ٤سم فإن أ هـ = ...



(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٤

$$\frac{٥}{٩} = \frac{\text{٢١ − أ م}}{\text{أ م}}$$

٥ أ م = ١٨٩ − ٩ أ م

١٤ أ م = ١٨٩

∴ أ م = ١٣,٥سم

$$\frac{\text{ب و}}{\text{ب م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ م}}$$

$$\frac{٤}{٩} = \frac{\text{أ هـ}}{١٣,٥}$$

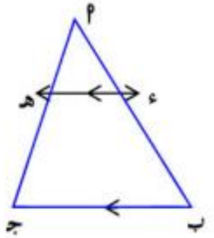
∴ أ هـ = ٦سم

الوحدة الثانية

الدرس الأول: المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الأخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



$\frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

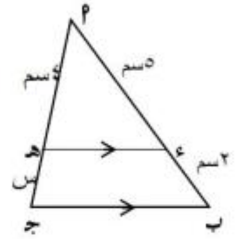
$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

$\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$

مثال(١) في كل من الأشكال التالية ءهـ // بجـ أوجد قيمة س العددية

١



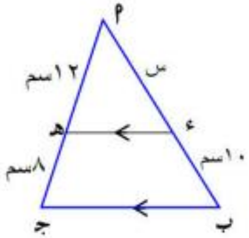
$\frac{\text{هـجـ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أء}}$

$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \text{س} = \frac{٢\times٤}{٥}$

$\therefore$ س = ١,٦سم

٢

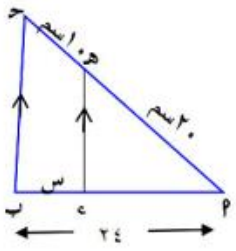


$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

$\frac{\text{س}}{١٠} = \frac{١٢}{٨}$

$\therefore \text{س} = \frac{١٢\times١٠}{٨} = ١٥\text{سم}$

٣



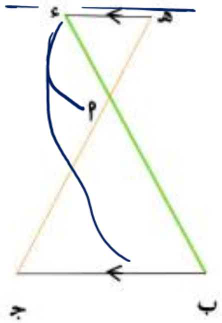
$\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\text{س}}{٢٤} = \frac{١٠}{٣٠}$

$\therefore \text{س} = \frac{١٠\times٢٤}{٣٠} = ٨\text{سم}$

نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ويقطع $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ في ء ، هـ فإن



$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$

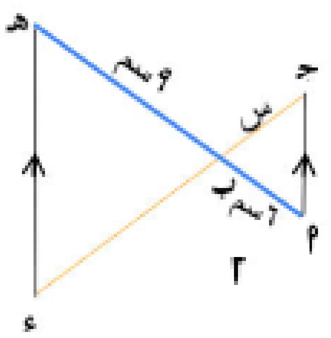
ويكون

$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ ، $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$

مثال(٢) في الشكل المقابل

جـ ء = ١٨سم

أوجد طول ب جـ



الحل

∵ ء هـ // ﺃ جـ

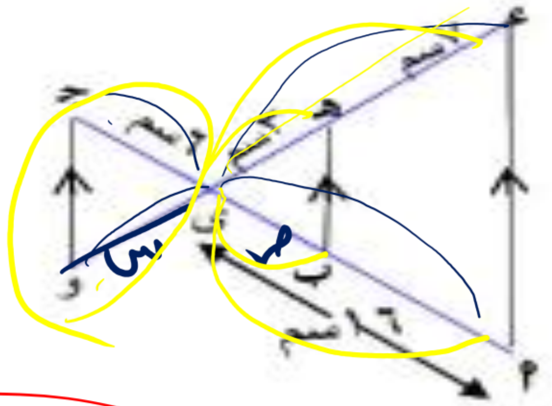
$$\therefore \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ﺃ}}{\text{ﺃ هـ}}$$

$$\frac{\text{جـ ب}}{١٨} = \frac{٦}{١٥}$$

$$\therefore \text{ب جـ} = \frac{١٨\times٦}{١٥} = ٧,٢\text{سم}$$

مثال(٣) أوجد طول ي و ، ى ب

س



الحل

$$\frac{\text{و ى}}{\text{ى ء}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ﺃ ى}}$$

$$\frac{\text{ى و}}{\text{ى ء}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{ى ﺃ}}$$

$$\frac{س}{١٠} = \frac{٦}{١٦}$$

$$\frac{\text{ى و}}{١٠} = \frac{٦}{١٦}$$

$$س = \frac{٦\times\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{١٦}_{٨}} = \frac{٣٠}{٨}$$

$$\therefore \text{ى و} = \frac{١٠\times٦}{١٦} = ٣,٧٥$$

∴ ى و = ٣,٧٥سم

∵ ب هـ // ﺃ ء

$$\frac{\text{هـ ى}}{\text{ء ى}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ﺃ ى}}$$

$$\therefore \frac{\text{ى ب}}{\text{ى ﺃ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ى ء}}$$

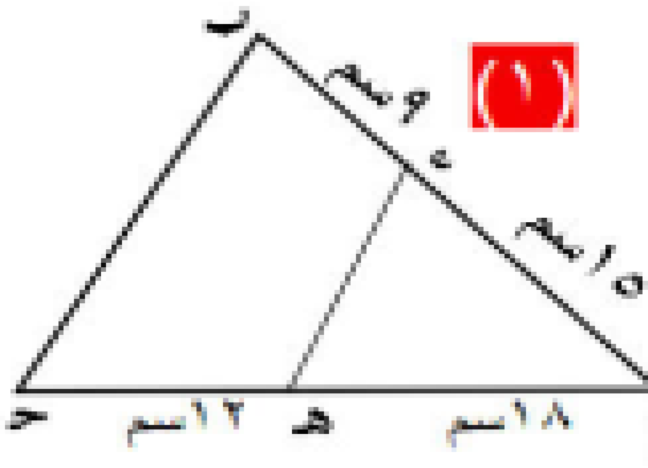
$$\frac{\text{ب ى}}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$$

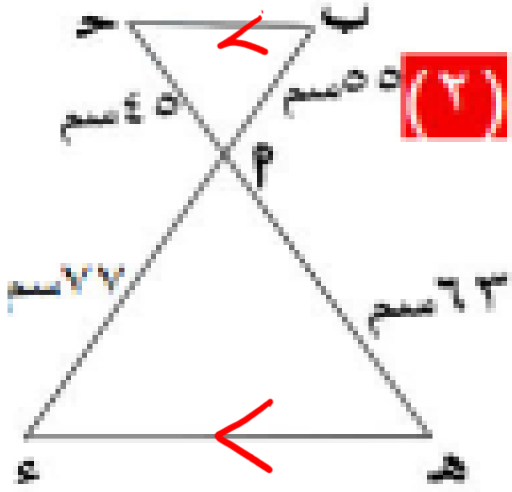
$$\frac{م}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$$

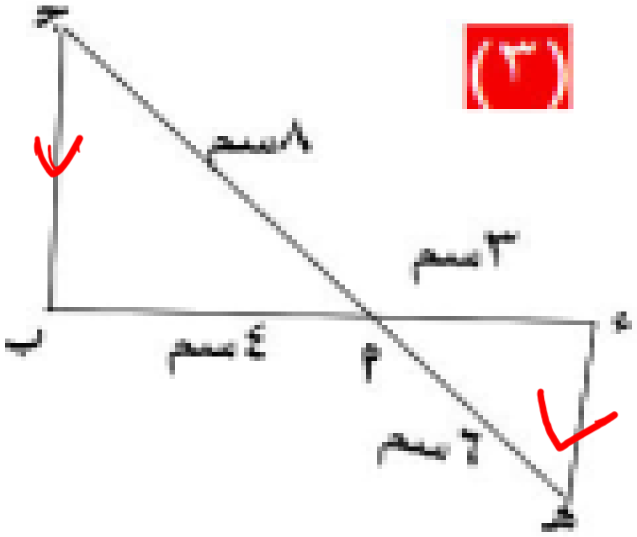
$$م = \frac{٣\times\cancel{١٦}^{٨}}{\cancel{١٠}_{٥}} = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$$

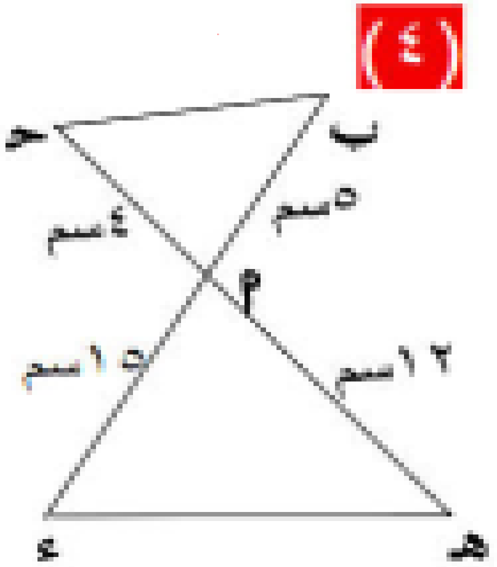
٢ في كل من الأشكال التالية حدد إذا كان

ء هـ // ب جـ









(٢)

$\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٧}$ ← (١)

$\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧}$ ← (٢)

من (١)، (٢) $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

بجـ // ءهـ

(٤)

$\frac{أب}{أء} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$ ← (١)

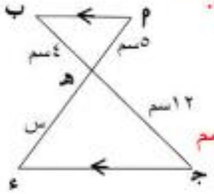
$\frac{أجـ}{أهـ} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$ ← (٢)

من (١)(٢) $\frac{أب}{أء} = \frac{أجـ}{أهـ}$ بجـ

١ في الشكل المقابل:

$\overline{أب} \parallel \overline{جء}$

فإن س= ......سم



(أ) ١١ (ب) ١٥

(جـ) ٨ (د) ٩

٢ في الشكل المقابل:

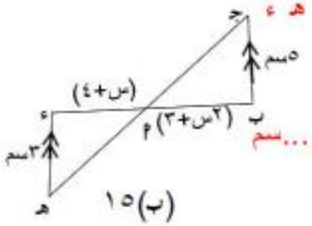
هـ جـ = ...سم

(أ) ٤,٥ (ب) ٩

(جـ) ٥ (د) ٨

٣ $\overline{بجـ} \parallel \overline{هـء}$

أب = ...سم



(أ) ~~١١~~ (ب) ١٥

(جـ) ٢٠ (د) ٢٥

س+ص ٧

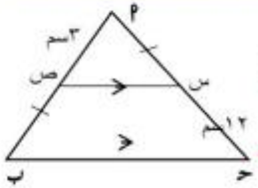
(أ) ١٦ (ب) ١٥

(جـ) ١٢ (د) ١٠

٥ $\overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$

، أ س = ب ص

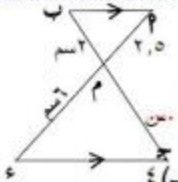
فإن أ جـ = ...سم



(أ) ١٥ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

٦ $\overline{أب} \parallel \overline{جء}$ فإن س=....سم

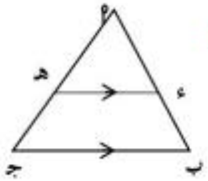


(أ) ٣,٦ (ب) ٤

(جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

٧ ءهـ : ب جـ = ٣ : ٥

فإن $\frac{أب}{أء}$ = ...



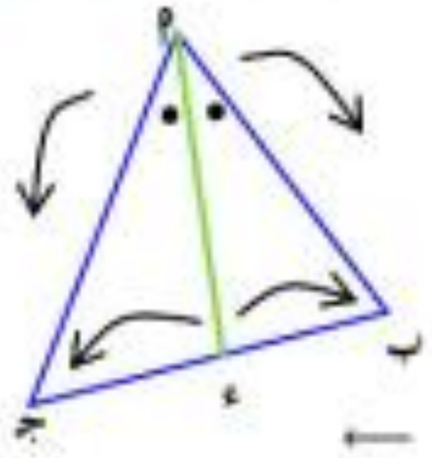
(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) ١,٥

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

$\frac{}{} = \frac{٣}{٥}$

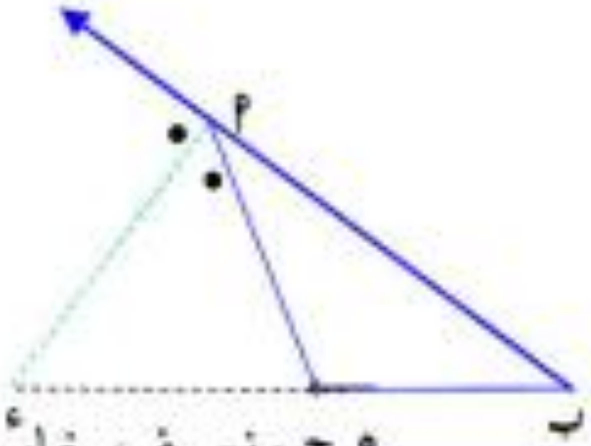
$\frac{٣}{٥} = \frac{١٥}{٢٥}$

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.



أ ء منصف داخلي

$$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ء جـ}}$$



أ ء منصف خارجي

$$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ء جـ}}$$

طول المنصف

$$\text{أء} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب ء} \times \text{ء جـ}}$$

من الداخل

الضلعين-الجزئين

$$\text{أء} = \sqrt{\text{ب ء} \times \text{ء جـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$$

من الخارج

الجزئين-الضلعين

ملاحظات

١ المنصفان الداخلي والخارجي لنفس الزاوية من المثلث متعامدان.

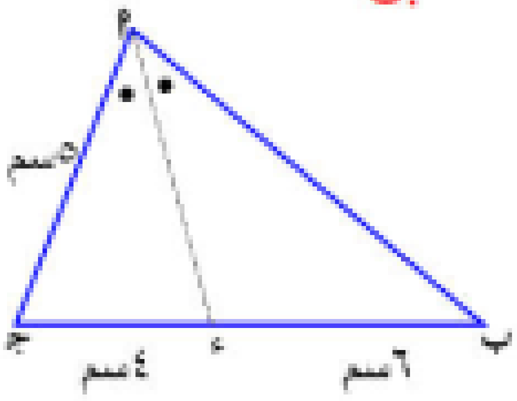
٢ قياس الزاوية بين المنصف الداخلي والخارجي = ٩٠° [قائمة]

٣ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يوازي القاعدة.

٤ المنصف الداخلي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة وعمودي عليها (محور تماثل لها).

٥ منصفات زوايا المثلث الداخلة تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث

مثال (١) في الشكل المقابل



أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أء}}$

الحـــل

∵ $\overline{\text{أء}}$ ينصف $\widehat{\text{ب أ ج}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء ج}}$

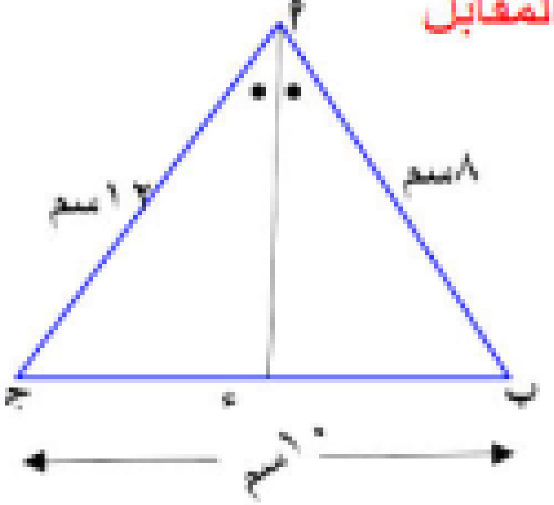
∴ $\frac{\text{أب}}{٥} = \frac{٦}{٤}$

أب $= \frac{٥\times٦}{٤} = ٧,٥$ سم

أء $= \sqrt{\text{اب} \times \text{اج} - \text{ءب} \times \text{ء ج}}$

$= \sqrt{٧,٥\times٥ - ٤\times٦} \simeq ٣,٧$ سم

مثال (٣) في الشكل المقابل



أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

الحـــل

∵ أ ء ينصف (ب أ ج)

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{أب}}{\text{أج}}$ ء ج $= ١٠ -$ ب ء

$\frac{\text{ب ء}}{١٠ - \text{ب ء}} = \frac{٨}{١٢}$

١٢ ب ء $= ٨(١٠ -$ ب ء$)$

١٢ ب ء $= ٨٠ - ٨$ ب ء

١٢ ب ء $+ ٨$ ب ء $= ٨٠$

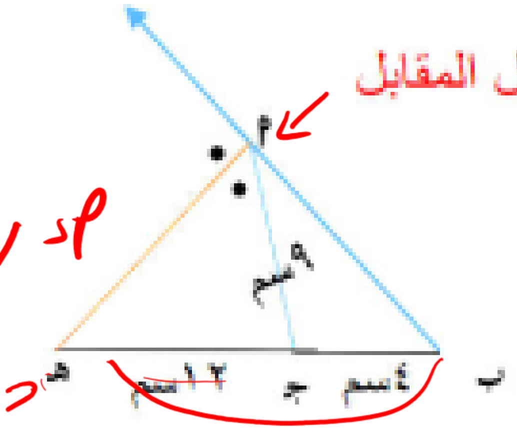
٢٠ ب ء $= ٨٠$

ب ء $= \frac{٨٠}{٢٠} = ٤$ سم

∴ ء ج $= ١٠ - ٤ = ٦$ سم

مثال(٢) في الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{أب}$ ، $\overline{أهـ}$



الحـــــل

∵ $\overline{أهـ}$ المنصف

$$\frac{أب}{أجـ} = \frac{هـب}{هـجـ} = \frac{أب}{٩} = \frac{١٦}{١٢}$$

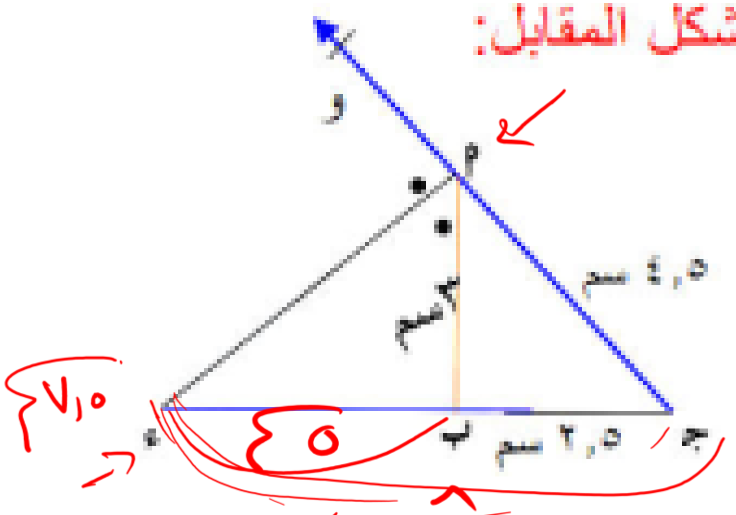
$$أب = \frac{٩ \times ١٦}{١٢} = ١٢$$

$$أهـ = \sqrt{هـب \times هـجـ - أب \times أجـ}$$

$$= \sqrt{١٦ \times ١٢ - ١٢ \times ٩} = ٩,١٧$$

مثال(٤) في الشكل المقابل:

أوجد طول $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ ء}$



الحـــــل

$$أء = \sqrt{ءب \times ءجـ - أب \times أجـ}$$

$$أء = \sqrt{٥ \times ٧,٥ - ٤,٥ \times ٣}$$

$$أء = ٤,٩$$

∵ أء ينصف (ب أ ء)

$$\therefore \frac{أب}{أجـ} = \frac{ءب}{ءجـ} \qquad ءجـ = س + ٢,٥$$

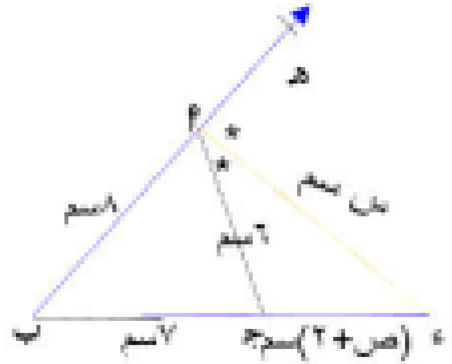
$$\frac{٣}{٤,٥} = \frac{س}{س + ٢,٥}$$

$$٤,٥ س = ٣ س + ٧,٥$$

$$١,٥ س = ٧,٥ \qquad س = \frac{٧,٥}{١,٥} = ٥$$

مثال (٦)

أوجد قيمة س ، ص



الحل

∵ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف $\hat{(أ)}$ الخارجة

∴ $\frac{جـ ء}{ب ء} = \frac{أ جـ}{أ ب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

أ ء منصف خارجيا لزاوية أ

∴ $\frac{ص+٢}{ص+٢+٧} = \frac{٣}{٤}$

٤(ص+٢)=٣(ص+٩)

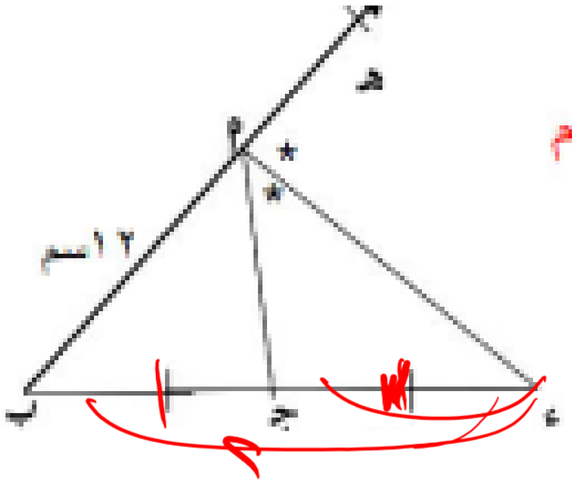
$\frac{أ جـ}{أ ب}$ $\frac{جـ ء}{ب ء}$

٤ص+٨=٣ص+٢٧

٤ص-٣ص=٢٧-٨

ص=١٩

$\frac{أ جـ}{١٢} \times \frac{١}{٢}$



∴ ء جـ = ص+٢ = ١٩+٢ = ٢١سم

∴ أ ء = $\sqrt{ب ء \times جـ ء - أ جـ \times أ ب}$

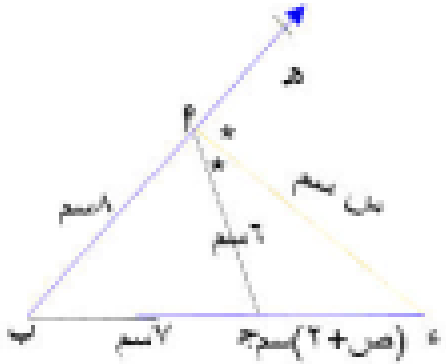
= $\sqrt{٢١ \times ٢٨ - ٦ \times ٨}$ ≃ ٢٣,٢سم

$\frac{٤}{٨}$ $\frac{٣}{٦}$

أ جـ = ٦سم

مثال (٦)

أوجد قيمة س ، ص



الحل

∵ $\overleftarrow{أء}$ ينصف $(\hat{أ})$ الخارجة

$$\therefore \frac{جـ ء}{ب ء} = \frac{أ جـ}{أ ب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \frac{ص+٢}{ص+٢+٧} = \frac{٣}{٤}$$

أ د منصف خارجيا للزاوية أ

٤(ص+٢)=٣(ص+٩)

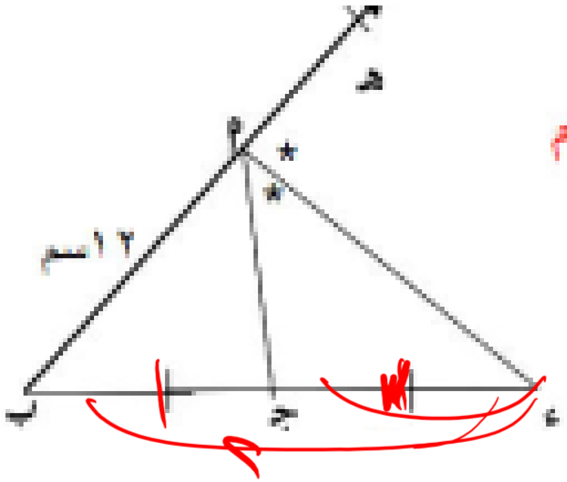
٤ص+٨=٣ص+٢٧

$\frac{أ جـ}{أ هـ}$ $\frac{جـ د}{ب د}$

٤ص-٣ص=٢٧-٨

ص=١٩

$\frac{أ جـ}{١٢} = \frac{١}{٢}$



∴ ء جـ = ص+٢ = ١٩+٢ = ٢١سم

$$\therefore أ ء = \sqrt{ء جـ \times ء ب - أ جـ \times أ ب}$$

$$= \sqrt{٢١ \times ٢٨ - ٦ \times ٨} \simeq ٢٣,٢ سم$$

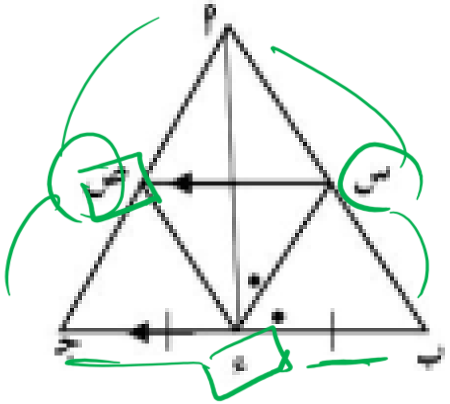
أ جـ = ٦ سم

$\frac{٣}{٦}$ $\frac{٤}{٨}$

مثال (٧) في الشكل المقابل

أثبت أن

$\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف $(\text{أ}\ \hat{\text{ء}}\ \text{جـ})$



الحل

في △ أ ء ب ∵ $\overrightarrow{\text{ء س}}$ ينصف $(\text{أ}\ \hat{\text{ء}}\ \text{ب})$

∴ $\frac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ء ب}}$ ← (١)

في △ أ ب جـ ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

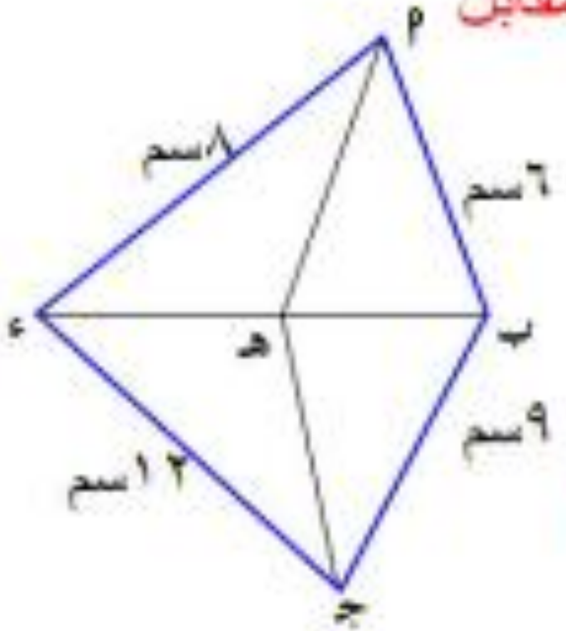
∴ $\frac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ص أ}}{\text{ص جـ}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{ء أ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ص أ}}{\text{ص جـ}}$ ، ∵ ء ب = ء جـ

∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ص أ}}{\text{ص جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف $(\text{أ}\ \hat{\text{ء}}\ \text{جـ})$

مثال(٨) في الشكل المقابل



$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\text{ب}\,\hat{\text{أ}}\,\text{ء})$

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\text{ب}\,\hat{\text{جـ}}\,\text{ء})$

الحل

في Δ أ ب ء فيه $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\text{ب}\,\hat{\text{أ}}\,\text{ء})$

$$\therefore \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (١)$$

في Δ ب جـ ء

$$\because \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (٢)$$

$\therefore$ من (١) ، (٢) $\therefore \dfrac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \dfrac{\text{جـب}}{\text{جـء}}$

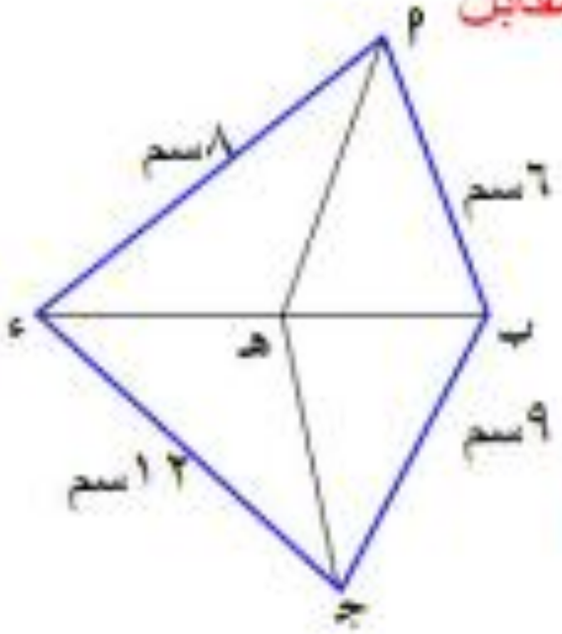
$\therefore$ $\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\text{ب}\,\hat{\text{جـ}}\,\text{ء})$

مثال(٨) في الشكل المقابل

$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$



الحل

في $\triangle$ أ ب ء فيه $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

$\therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (١)$

في $\triangle$ ب جـ ء

$\because \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (٢)$

$\therefore$ من (١) ، (٢) $\therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}}$

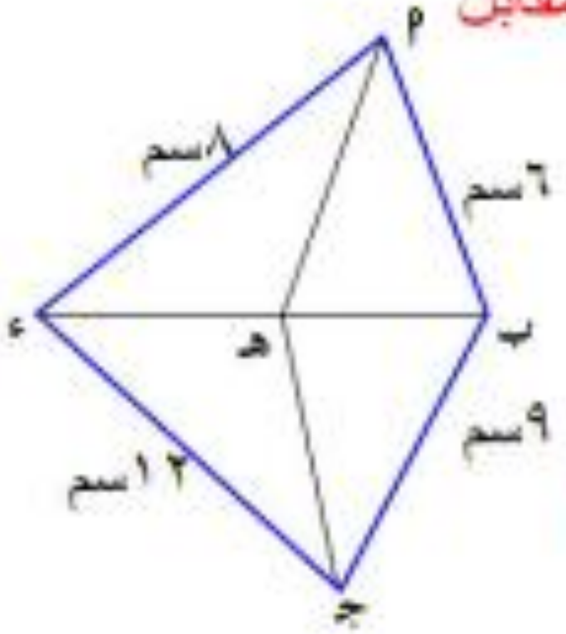
$\therefore \overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$

مثال(٨) في الشكل المقابل

$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$



الحل

في Δ أ ب ء فيه $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

$\therefore \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (١)$

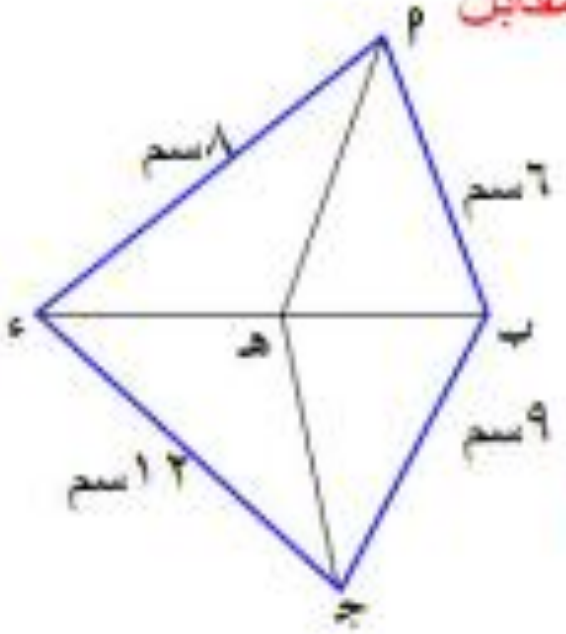
في Δ ب جـ ء

$\because \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (٢)$

$\therefore$ من (١) ، (٢) $\therefore \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$

مثال(٨) في الشكل المقابل



$\overleftarrow{\text{م هـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب م ء}})$

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$

الحل

في Δ م ب ء فيه $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب م ء}})$

$$\therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longrightarrow (١)$$

في Δ ب جـ ء

$$\because \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longrightarrow (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) $\therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}}$

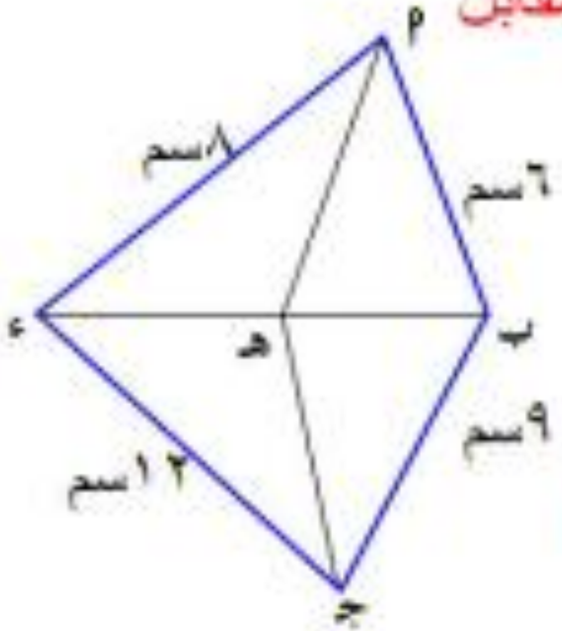
∴ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$

مثال(٨) في الشكل المقابل

$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$



الحل

في $\triangle$ أ ب ء فيه $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب أ ء}})$

$$\therefore \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (١)$$

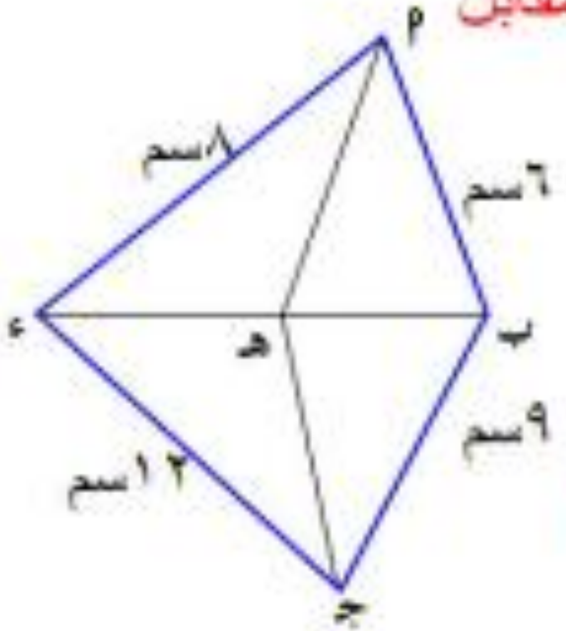
في $\triangle$ ب جـ ء

$$\because \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (٢)$$

$$\therefore \text{من } (١) \text{ ، } (٢) \quad \therefore \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}}$$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $(\widehat{\text{ب جـ ء}})$

مثال(٨) في الشكل المقابل



$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{أ}}$ ء)

أثبت أن

$\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{جـ}}$ ء)

الحل

في Δ أ ب ء فيه $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{أ}}$ ء)

$$\therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (١)$$

في Δ ب جـ ء

$$\because \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \longleftarrow (٢)$$

$\therefore$ من (١) ، (٢) $\quad \therefore \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{جـ}}$ ء)